Proceedings of IAM, V.8, N.2, 2019, pp.202-210

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОРЯДКА ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ *

А.А. Намазов [1,2]

[1] Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
[2] Азербайджанский Технический Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: atif.namazov@gmail.com

Резюме. Рассматривается задача определения порядка дробных производных колебательных систем, когда масса является достаточно большой. Принимая обратное значение массы малого параметра, решение соответствующей задачи Коши в первом приближении находится аналитически. Далее при помощи заданных статистических данных формируется квадратичный функционал, являющийся отклонением решения колебательных систем от систем первого приближения и методом наименьших квадратов приводится нелинейное алгебрическое уравнение для нахождения параметра дробных производных. Такой подход позволяет предлагать итерационные алгоритмы разделения заданного интервала пополам, находить степени дробной производной, когда демпфером является Ньютоновская жидкость. Приводится вычислительный алгоритм для ее решения.

Ключевые слова: Колебательная система, дробная производная, жидкостный демпфер, метод наименьших квадратов, квадратичный функционал, малый параметр.

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение.

Как известно [6,7], обычно движение колебательных систем по вертикальной оси описывается следующим обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f\,, \tag{1}$$

где $a = \dfrac{2S\sqrt{\mu\rho}}{m}$, $b = \dfrac{k}{m}$ и рассматривается жесткая пластина с массой m и площадью S, ρ-плотность жидкости, μ- постоянная вязкой упругости, постоянная k-характеризует свойства пружины (см рис. 1). В (1) $a\dot{x}$ является жидкостным демпфером, который служит для колебания. Однако если движение происходит внутри жидкости, то структура (1) совсем меняется и (1) переходит к следующему виду [2,11]

$$\ddot{x} + aD^{\alpha}x + bx = f \tag{2}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0\,,\; x'(t_0) = x_1 \tag{3}$$

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 02.07.2019

Здесь $aD^{\alpha}x$ является математической моделью жидкостного демпфера через дробные производные, где α - является дробным числом. Для простоты рассмотрим задачу Коши [3,6] для (2)

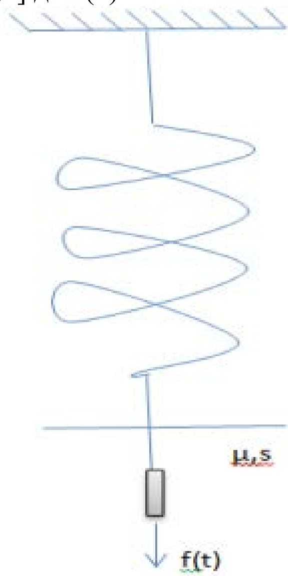

Рис.1

В данной задаче ((2), (3)) параметр α не задается для конкретных практических задач. Например, при добыче нефти со штанго-насосной установкой [13,16], и этот параметр α непосредственно зависит от m, a, b. Поэтому нахождение α в [6] производится с помощью заданных статистических данных [17]. Сначала уравнение (2) приводится к соответствующему интегральному уравнению [15] и далее с помощью дискретизации получаем приближенное решение. Далее, с помощью заданных статистических данных строим квадратичный функционал и методом наименьших квадратов получаем нелинейное алгебраическое уравнение для определения α [1,9]. С помощью разделения пополам заданного интервала по [8], получим алгоритм для нахождения дробных производных α [4,5].

Однако такой подход для решения нелинейного алгебраического уравнения относительно α является достаточно сложным и трудно определить решение интегрального уравнения.

В данной работе предполагается, что значение массы m является достаточно большим (такой случай возможен в случае добычи нефти, т.е. плунжер в штанго-насосной установке [13,16]). Такой случай позволяет принимать $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$ и асимптотически представить решение уравнение (1), при

$f=0$ в первом приближении. Далее, такое упрощение позволяет получить для α более простое уравнение [10,17], где в отличие от (1), предлагается итерационно-вычислительный алгоритм для его решения.

2. Разложение решения уравнения (1) по параметру $\varepsilon=\dfrac{1}{m}$ при $f\equiv 0$.

Рассмотрим уравнение (1) при $f\equiv 0$ в следующем виде

$$\ddot{x}+\varepsilon a\dot{x}+bx=0 \tag{4}$$

при начальных условиях $x(t_0)=0$, $x'(t_0)=x_1$. Тогда, используя [2] для определения $x(t)$, получим следующее интегральное уравнение:

$$x(t)+\int_{t_0}^{t}K_\alpha(t-z,\varepsilon)x(z)dz=x_1(t-t_0), \tag{5}$$

где ядро $K_\alpha(t-z,\varepsilon)$ определяется в следующей форме [2,13]

$$K_\alpha(t-z,\varepsilon)=\varepsilon a\frac{(t-z)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\varepsilon b(t-z)\ . \tag{6}$$

Учитывая (6), (5) получит следующий вид:

$$x(t)+\varepsilon\int_{t_0}^{t}\left[a\frac{(t-z)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b\cdot(t-z)\right]x(z)dz=x_1(t-t_0)\,. \tag{7}$$

Из (7) $x(t)$ можно искать в виде следующего ряда по малому параметру ε

$$x(t)=x^0(t)+\varepsilon\, x^1(t)+\varepsilon^2\, x^2(t)+\dots, \tag{8}$$

т. е., учитывая (8) в (7) для $x^0(t),\ x^1(t)$,... получим следующие выражения

$$x^0(t)=x_1(t-t_0) \tag{9}$$

$$x^1(t)+\varepsilon\int_{t_0}^{t}\left[a\frac{(t-z)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b\cdot(t-z)\right]x_1(t-x_0)dz=0\,. \tag{10}$$

Теперь вычислим $x^1(t)$ из (10):

$$x^1(t)=-x_1\int_{t_0}^{t}\left[a\frac{(t-z)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b\cdot(t-z)\right](t-x_0)dz=$$

$$=x_1\int_{t_0}^{t}\left[a\frac{(t-z)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b\cdot(t-z)^2-\left(a\frac{(t-z)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b\cdot(t-z)\right)\right](t-t_0)dz=$$

(11)

$$=x_1\left[\frac{a(t-t_0)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}-\frac{5b(t-t_0)^3}{6}\right].$$

Таким образом, решение задачи (5) с начальными условиями $x(t_0)=0$, $x'(t_0)=x_1$ в первом приближением имеет вид

$$x(t,\varepsilon)=x_1(t-x_0)+\varepsilon\, x_1\left[-\frac{a(t-t_0)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}+\frac{5b(t-t_0)^3}{6}\right]. \qquad (12)$$

Далее, можем определить α из соответствующих соотношений при минимизации функционала, построенного через (12).

3. Построение функционала отклонения от статистических данных.

В рис.1 примем $x_0=0$ и при разных начальных скоростях $x_i^{'}(t_0)=x_{1i}$ $(i=1,2,...,k)$ имеются соответствующие конечные значения x_i, где T -значение в конце интервала $x(T)=x_T$. Обозначим решение уравнения с начальными условиями $x(t_0)=0$, $x'(t_0)=x_1$ через $x(t,\alpha,x_1)$. Таким образом, x и x_{1i} фактически являются статистическими данными (например при добыче нефти с помощью штанго-насосной установки, начальные данные x_{1i} задаются инженером). Тогда выбор α обеспечивает близость $x(t,\alpha,x_{1i})$ и x_{1i}, т.е. фактически обеспечивается адекватность математической модели (2). Далее составим следующий функционал

$$I=\sum_{i=1}^{k}\left(x(t,\alpha,x_{1i})-x_{Ti}\right)^2 \qquad (13)$$

и попытаемся найти такое $\alpha=\alpha^*$, чтобы функционал (13) получил минимальное значение. Отметим, что в (13) вместо $x(t,\alpha,x_{1i})$ подразумевается соотношение (12). Тогда:

$$x(T,\alpha,x,\varepsilon)=x_{1i}(t-t_0)+\varepsilon\, x_{1i}\left[\frac{a(T-t_0)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}-\frac{5b(T-t_0)^3}{6}\right]. \qquad (14)$$

Такое представление позволяет нам использовать метод наименьших квадратов для нахождения $\alpha=\alpha^*$

4. Метод наименьших квадратов

Для того, чтобы найти такое α, которое обеспечивало бы близость статистических данных x_{Ti} к $x(T,\alpha,x_{1i},\varepsilon)$, берем производные из (13) в виде

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=2\sum_{i=1}^{k}\left(x(t,\alpha,x_{1i})-x_{Ti}\right)\frac{\partial x(t,\alpha,x_{1i})}{\partial\alpha}\ . \qquad (15)$$

Отметим, что производные $x(T,\alpha,x_1,\varepsilon)$ из (14) имеют вид

$$\frac{\partial x(t,\alpha,x_{1i},\varepsilon)}{\partial\alpha}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{a(T-t_0)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}\right)x_{1i}\ . \qquad (16)$$

Подставляя (16) в (15), имеем

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{a(T-t_0)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}\right)\sum_{i=1}^{k}\left(x(T,\alpha,x_{1i},\varepsilon)-x_{1i}\right)x_{1i}\,. \qquad (17)$$

Приравнивая $\frac{\partial I}{\partial \alpha}$ к нулю, из (17) для определения α имеем следующее нелинейное алгебраическое уравнение

$$\sum_{i=1}^{k}\left(x(T,\alpha,x_{1i},\varepsilon)-x_{Ti}\right)x_{1i} = 0\,. \qquad (18)$$

Подставляя выражение $x(T,\alpha,x_{1i},\varepsilon)$ из (14) в (18), имеем

$$\sum_{i=1}^{k}\left\{x_{1i}(T-t_0)+\varepsilon\, x_{1i}\left[\frac{a(T-t_0)^{3-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}-5b\frac{(T-t_0)^3}{6}\right]-x_{Ti}\right\}x_{1i} = 0\,. \qquad (19)$$

После некоторых преобразований для нахождения α имеем

$$\frac{a(T-t_0)^{3-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} = 5b\frac{(T-t_0)^3}{6}+\frac{1}{\varepsilon}\left[-(T-t_0)+\frac{x_{T1}x_{11}+\ldots+x_{Tk}x_{1k}}{x_{11}^2+\ldots+x_{1k}^2}\right]. \qquad (20)$$

Отметим, что решая (20) с помощью ниже приведенных вычислительных алгоритмов можем определить α. Ниже приведем эти алгоритмы.

5. Вычислительные алгоритмы.

Для нахождения α из (20) используем алгоритм разделения интервала (t_0, T) пополам [12,14]. Поэтому, перенеся правую часть (20) в левую, имеем следующее уравнение

$$f(\alpha,\varepsilon)=\frac{a(T-t_0)^{3-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}-5b\frac{(T-t_0)^3}{6}+\frac{1}{\varepsilon}\left[-(T-t_0)+\frac{x_{T1}x_{11}+\ldots+x_{Tk}x_{1k}}{x_{11}^2+\ldots+x_{1k}^2}\right]=0 \qquad (21)$$

Разыскиваем α на интервале (1,2).

Таким образом, для определения порядка α в уравнении (1) получаем следующий

Алгоритм 1:

1. Задаются параметры a, b, F, m, и δ - определяющие точность решения задачи.
2. Определяется отрезок $[\alpha_1, \alpha_2]$, где ищется корень функции $f(\alpha)$, и $f(\alpha_1)\cdot f(\alpha_2)<0$
3. Задаются $N=10$, $I=4$.

4. Вычисляется средняя точка $\alpha = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ и значения $x(\alpha)$ по формуле (21).
5. Если $|x(\alpha)| < \varepsilon$, то процесс останавливается. Иначе, если $x(\alpha_1) \cdot x(\alpha) < 0$, обозначаем $\alpha_2 = \alpha$, а если $x(\alpha) \cdot x(\alpha_2) < 0$, то $\alpha_1 = \alpha$. Переходим к пункту 4.

6. Заключение.

С помощью внешнего малого параметра $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$ в (2) получается решение задачи (2), (3) в первом приближении. Такой подход позволяет предлагать итерационные алгоритмы разделения заданного интервала пополам, нахождение степени дробной производной, когда демпфером является Ньютоновская жидкость.

Автор выражает признательность академику Ф.А. Алиеву за постановку задачи, оказанную помощь при проведении данного исследования и написании настоящей статьи .

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev F.A., Abbasov A.N., Mutallimov M.M. Algoritm for solution of the problem of the optimization of the energy expenses at the exploitation of chinks by subsurfase –pumb installations pp. Appl. Comput. Math., V.3, N.1, 2004, pp.2-9.
2. Aliev F.A., Aliev N.A. Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of linear fractional-derivative ordinary differential equations with constant matrix, Appl. Comp. Math, V.17, N.3, 2018, pp.317-322.
3. Aliev F.A., Ismailov N.A. Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl. Comput. Math., V.12, 2013, pp.306–313.
4. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A. Asymptotic method for finding the coefficient of hydraulic resistance in lifting of fluid on tubing, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, V.23, N.5, 2015, pp.511–518.
5. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F. Algorithm for calculating the parameters of formation of gas-liquid mixture in the shoe of gas lift well, App. Comp. Math., V.15, 2016, pp.370-376.
6. Bagley R.L., Torvik P.L. On the fractional calculus models of viscoelastic behavior, J. Rheool, V.30, 1986, pp.133-155.

7. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients, Appl. Math. Comput., V.187, 2007, pp.68-78
8. Himmelblau D.M. Applied Nonlinear Programming, New-York, Craw-Hill Book Company, 1972, 536 p.
9. Lavrent’ev M.M., Romanov V.G., Vasil’ev V.G. Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, V.167, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.
10. Miller K.S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, New York: Wiley, 1993, 336 p.
11. Odibat Zaid M. Analytic study on linear systems of fractional differential equations, Computers and Mathematics with Applications, V.59, 2010, pp.1171-1183.
12. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993, 780 p.
13. Алиев Ф.А., Муталлимов М.М., Намазов А.А., Метод идентификации для определения порядка дробной производной колебательной системы, Proceeding of IAM, V.8, N.1, 2019, pp.3-13.
14. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики, ГИФМЛ, Москва 1963, сс.118-119.
15. Мейрманов А.М. Задача Стефана, Новосибирск: Наука, 1986, 239 с.
16. Муталлимов М.М., Алиев Ф.А. Методы решения задач оптимизации при эксплуатации нефтяных скважин, Saarbrücken (Deutscland), LAP LAMBERT, 2012, 164 с.
17. Петровски И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: "Наука", 1965, 128 с.

COMPUTATIONAL ALGORITHM FOR DETERMINING THE ORDER OF FRACTIONAL DERIVATIVES OF OSCILLATORY SYSTEMS

A.A. Namazov [1,2]

[1] Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan
[2]Azerbaijan Technical University, , Baku, Azerbaijan
e-mail: atif.namazov@gmail.com

ABSTRACT

In the paper the problem of determining the order of fractional derivatives of oscillatory systems when the mass is sufficiently large is considered. Taking the inverse value of the mass a small parameter, the solution of the corresponding Cauchy problem in the first approximation is analytically. Then, using the given statistical data, the quadratic functional is formed, which is the deviation of the solution of the oscillatory systems from the first-approximation systems and the least-squares method is used to derive a non-linear algebraic equation for finding the fractional derivatives parameter. Computational and iterative algorithms for its solution are given.

Keywords: oscillation process, inverse problem, fractional derivative, statistical data, least-squares method.

REFERENCES

1. Aliev F.A., Aliev N.A. , Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of linear fractional-derivative ordinary differential equations with constant matrix. Appl.Comp.Math, 17(3) (2018) 317-322
2. Aliev F.A., Ismailov N.A., Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl. Comput. Math. 12 (2013), 306–313.
3. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F. Algorithm for calculating the parameters of formation of gas-liquid mixture in the shoe of gas lift well. Appl. Comp. Math., 2016, vol. 15,pp. 370-376.
4. Aliev Fikret A, Abbasov A.N., Mutallimov M.M., Algoritm for solution of the problem of the optimization of the energy expenses at the exploitation of chinks by subsurfase –pumb installations pp. Appl. Comput. Math., Volume 3 №1, 2-9.
5. Bagley R.L., Torvik P.L., On the fractional calculus models of viscoelastic behavior. J. Rheool, 30 (1986) 133-155
6. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients. Appl. Math. Comput., 2007, v.187, pp.68-78
7. F.A. Aliev, N.A. Ismailov, A.A. Namazov Asymptotic method for finding the coefficient of hydraulic resistance in lifting of fluid on tubing. Journal of Inverse and Ill-posed Problems, V. 23, N. 5, 2015, pp. 511–518.
8. Himmelblau D.M., Applied Nonlinear Programming, New-York, Craw-Hill Book Company, 1972, p.536.
9. K. S. Miller, B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, New York: Wiley, 1993, 336p.
10. Lavrent’ev M.M., Romanov V.G., Vasil’ev V.G. Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations. Springer-Verlag,

Lecture Notes in Mathematics, Vol. 167, Berlin, Heidelberg, New York, 1970

11. Odibat Zaid M. Analytic study on linear systems of fractional differential equations. Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010), pp.1171-1183.
12. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993, 780 p.
13. Demidovich B. P., I. A. Maron, Osnovy vychislitel'noy matematiki, GIFML, Moskva 1963 g., str. 118-119 ( )
14. Meyrmanov A.M. Zadacha Stefana , Novosibirsk: Nauka, 1986, 239 s.
15. Mutallimov M.M., Aliev F.A. Metody resheniya zadach optimizatsii pri ekspluatatsii neftyanykh skvazhin. Saarbrücken (Deutscland), LAP LAMBERT, 2012, 164 s.
16. Petrovski I.G., Lektsii po teorii integral'nykh uravneniy. M.: "Nauka", 1965. - 128 str.
17. F.A. Aliev, M.M. Mutallimov, A.A. Namazov, Metod identifikatsii dlya opredeleniya poryadka drobnoy proizvodnoy kolebatel'noy sistemy, Proceeding of IAM, V.8, N.1, 2019, pp 3-13.